

LÓGICA MATEMÁTICA

Introducción.

Aprender matemáticas, física y química “es muy difícil”; así se expresan la mayoría de estudiantes de todos los niveles, sin embargo pocas veces se busca una explicación del porqué no aprenden las ciencias exactas los alumnos. Nuestra teoría es la siguiente: **“Los alumnos no aprenden ciencias exactas, porque no saben relacionar los conocimientos que se proporcionan en la escuela (leyes, teoremas, formulas) con los problemas que se le presentan en la vida real”**. Otro problema grave es que el aprendizaje no es significativo. El presente trabajo pretende motivar a los estudiantes para que con ayuda de la “lógica matemática”, él sea capaz de encontrar estos relacionamientos entre los diferentes esquemas de aprendizaje, para que de esta manera tenga una buena estructura cognitiva. Consideramos que si el alumno sabe lógica matemática puede relacionar estos conocimientos, con los de otras áreas para de esta manera crear conocimiento.

La lógica estudia la forma del razonamiento, es una disciplina que por medio de reglas y técnicas determina si un argumento es válido. La lógica es ampliamente aplicada en la filosofía, matemáticas, computación, física. En la filosofía para determinar si un razonamiento es válido o no, ya que una frase puede tener diferentes interpretaciones, sin embargo la lógica permite saber el significado correcto. En las matemáticas para demostrar teoremas e inferir resultados matemáticas que puedan ser aplicados en investigaciones. En la computación para revisar programas. En general la lógica se aplica en la tarea diaria, ya que cualquier trabajo que se realiza tiene un procedimiento lógico, por el ejemplo; para ir de compras al supermercado una ama de casa tiene que realizar cierto procedimiento lógico que permita realizar dicha tarea. Si una persona desea pintar una pared, este trabajo tiene un procedimiento lógico, ya que no puede pintar si antes no prepara la pintura, o no debe pintar la parte baja de la pared si antes no pintó la parte alta porque se mancharía lo que ya tiene pintado, también dependiendo si es zurdo o derecho, él puede pintar de izquierda a derecha o de derecha a izquierda según el caso, todo esto es la aplicación de la lógica.

La lógica es pues muy importante; ya que permite resolver incluso problemas a los que nunca se ha enfrentado el ser humano utilizando solamente su inteligencia y apoyándose de algunos conocimientos acumulados, se pueden obtener nuevos inventos innovaciones a los ya existentes o simplemente utilización de los mismos.

El orden en que se presenta el documento es el siguiente: Primeramente se establece la importancia de la lógica matemática, después definimos el concepto de proposición. Se establece el significado y utilidad de conectivos lógicos para formar proposiciones compuestas. Más tarde abordamos las proposiciones condicionales y bicondicionales. Definimos tautología, contradicción y contingente, y proporcionamos una lista de las tautologías más importantes, así mismo explicamos a que se le llama proposiciones lógicamente equivalente apoyándonos de tablas de verdad. Para finalizar; abordamos los métodos de demostración: directo y por contradicción, en donde incluye reglas de inferencia.

En este trabajo se trata además de presentar las explicaciones con ejemplos que le sean familiares. Nuestro objetivo es que el alumno aprenda a realizar demostraciones formales por el método directo y el método por contradicción. Ya que la mayoría de los libros comerciales únicamente se quedan en explicación y demostración de reglas de inferencia. Consideramos que si el alumno aprende lógica matemática no tendrá problemas para aprender ciencias exacta y será capaz de programar computadoras, ya que un programa de computadora no es otra cosa que una secuencia de pasos lógicos, que la persona establece para resolver n problema determinado.

Es importante mencionar que en las demostraciones no hay un solo camino para llegar al resultado. El camino puede ser mas largo o más corto dependiendo de las reglas de inferencia y tautologías que el alumno seleccione, pero definitivamente deberá llegar al resultado. Puede haber tantas soluciones como alumnos se tenga en clase y todas estar bien. Esto permite que el estudiante tenga confianza en la aplicación de reglas y fórmulas. De tal manera que cuando llegue a poner en practica esto, el sea capaz de inventar su propia solución, porque en la vida cada quien resuelve sus problemas aplicando las reglas de inferencia para relacionar los conocimientos y obtener el resultado.

Desarrollo.

La lógica matemática es la disciplina que trata de métodos de razonamiento. En un nivel elemental, la lógica proporciona reglas y técnicas para determinar si es o no valido un argumento dado. El razonamiento lógico se emplea en matemáticas para demostrar teoremas; en ciencias de la computación para verificar si son o no correctos los programas; en las ciencias física y naturales, para sacar conclusiones de experimentos; y en las ciencias sociales y en la vida cotidiana, para resolver una multitud de problemas. Ciertamente se usa en forma constante el razonamiento lógico para realizar cualquier actividad.

Proposiciones y operaciones lógicas.

Una proposición o enunciado es una oración que puede ser falsa o verdadera pero no ambas a la vez. La proposición es un elemento fundamental de la lógica matemática.

A continuación se tienen algunos ejemplos de proposiciones válidas y no válidas, y se explica el porqué algunos enunciados no son proposiciones. Las proposiciones se indican por medio de una letra minúscula, dos puntos y la proposición propiamente dicha. Ejemplo.

- p: La tierra es plana.
- q: $-17 + 38 = 21$
- r: $x > y - 9$
- s: El Morelia será campeón en la presente temporada de Fut-Bol.
- t: Hola ¿como estas?
- w: Lava el coche por favor.

Los incisos **p** y **q** sabemos que pueden tomar un valor de falso o verdadero; por lo tanto son proposiciones validas. El inciso **r** también es una proposición valida, aunque el valor de falso o verdadero depende del valor asignado a las variables **x** y **y** en determinado momento. La proposición del inciso **s** también esta perfectamente expresada aunque para decir si es falsa o verdadera se tendría que esperar a que terminara la temporada de fut-boll. Sin embargo los enunciados **t** y **w** no son válidos, ya que no pueden tomar un valor de falso o verdadero, uno de ellos es un saludo y el otro es una orden.

q	r	p = q ∧ r
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Conectivos lógicos y proposiciones compuestas.

Existen conectores u operadores lógicas que permiten formar proposiciones compuestas

(formadas por varias proposiciones). Los operadores o conectores básicos son:

Operador and (y)

Se utiliza para conectar dos proposiciones que se deben cumplir para que se pueda obtener un resultado verdadero. Si símbolo es: { \wedge , un punto (.), un paréntesis}. Se le conoce como la multiplicación lógica:

Ejemplo.

Sea el siguiente enunciado “El coche enciende cuando tiene gasolina en el tanque y tiene corriente la batería”

Sean:

- p: El coche enciende.
- q: Tiene gasolina el tanque.
- r: Tiene corriente la batería.

De tal manera que la representación del enunciado anterior usando simbología lógica es como sigue:

$$p = q \wedge r$$

Su tabla de verdad es como sigue:

Donde.

1 = verdadero

0 = falso

En la tabla anterior el valor de $q=1$ significa que el tanque tiene gasolina, $r=1$ significa que la batería tiene corriente y $p = q \wedge r=1$ significa que el coche puede encender. Se puede notar que si q o r valen cero implica que el auto no tiene gasolina y que por lo tanto no puede encender.

Operador Or (o)

Con este operador se obtiene un resultado verdadero cuando alguna de las proposiciones es verdadera. Se indica por medio de los siguientes símbolos: { \vee , $+$, \cup }. Se conoce como las suma lógica. Ejemplo.

Sea el siguiente enunciado “Una persona puede entrar al cine si compra su boleto u obtiene un pase”. Donde.

- p: Entra al cine.
- q: Compra su boleto.
- r: Obtiene un pase.

q	r	$p = q \vee r$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

La única manera en la que no puede ingresar al cine ($p=0$), es que no compre su boleto ($q=0$) y que no obtenga un pase ($r=0$).

Operador Not (no)

Su función es negar la proposición. Esto significa que si alguna proposición es verdadera y se le aplica el operador not se obtendrá su complemento o negación (falso). Este operador se indica por medio de los siguientes símbolos: {', ¬, ~}. Ejemplo.

q	r	$p = q \wedge r$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

La negación de está lloviendo en este momento ($p=1$), es no está lloviendo en este momento($p'=0$)

p	p'
1	0
0	1

Además de los operadores básicos (and, or y not) existe el operador xor, cuyo funcionamiento es semejante al operador or con la diferencia en que su resultado es verdadero solamente si una de las proposiciones es cierta, cuando ambas con verdad el resultado es falso.

En este momento ya se pueden representar con notación lógica enunciados más complejos. Ejemplo

Sean las proposiciones:

- p: Hoy es domingo.
- q: Tengo que estudiar teorías del aprendizaje.
- r: Aprobaré el curso.

El enunciado: “Hoy es domingo y tengo que estudiar teorías de aprendizaje o no aprobaré el curso”. Se puede representar simbólicamente de la siguiente manera:

$$p \wedge q \vee r$$

Por otro lado con ayuda de estos operadores básicos se pueden formar los operadores compuestos Nand (combinación de los operadores Not y And), Nor (combina operadores Not y Or) y Xnor (resultado de Xor y Not).

Proposiciones condicionales.

Una proposición condicional, es aquella que está formada por dos proposiciones simples (o compuesta) p y q. La cual se indica de la siguiente manera:

$$p \rightarrow q \quad \text{Se lee "Si p entonces q"}$$

Ejemplo.

El candidato del PRI dice "Si salgo electo presidente de la República recibirán un 50% de aumento en su sueldo el próximo año". Una declaración como esta se conoce como condicional. Su tabla de verdad es la siguiente:

Sean

p: Salió electo Presidente de la República.

q: Recibirán un 50% de aumento en su sueldo el próximo año.

De tal manera que el enunciado se puede expresar de las siguiente manera.

$p \rightarrow q$

Su tabla de verdad queda de la siguiente manera:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

La interpretación de los resultados de la tabla es la siguiente:

Considere que se desea analizar si el candidato presidencial mintió con la afirmación del enunciado anterior.

Cuando $p=1$; significa que salió electo, $q=1$ y recibieron un aumento de 50% en su sueldo, por lo tanto $p \rightarrow q = 1$; significa que el candidato dijo la verdad en su campaña. Cuando $p=1$ y $q=0$ significa que $p \rightarrow q = 0$; el candidato mintió, ya que salió electo y no se incrementaron los salarios. Cuando $p=0$ y $q=1$ significa que aunque no salió electo hubo un aumento del 50% en su salario, que posiblemente fue ajeno al candidato presidencial y por lo tanto; tampoco mintió de tal forma que $p \rightarrow q = 1$.

Proposición bicondicional.

Sean p y q dos proposiciones entonces se puede indicar la proposición bicondicional de la siguiente manera:

$p \leftrightarrow q$ Se lee "p si solo si q"

Esto significa que p es verdadera si y solo si q es también verdadera. O bien p es falsa si y solo si q también lo es. Ejemplo; el enunciado siguiente es una proposición bicondicional

"Es buen estudiante, si y solo si; tiene promedio de diez"

Donde:

p: Es buen estudiante.

q: Tiene promedio de diez.

por lo tanto su tabla de verdad es.

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

La proposición condicional solamente es verdadera si tanto p como q son falsas o bien ambas verdaderas

A partir de este momento, ya se está en condiciones de representar cualquier enunciado con conectores lógicos.

Ejemplo.

Sea el siguiente enunciado “Si no pago la luz, entonces me cortarán la corriente eléctrica. Y Si pago la luz, entonces me quedaré sin dinero o pediré prestado. Y Si me quedo sin dinero y pido prestado, entonces no podré pagar la deuda, si solo si soy desorganizado”

Donde:

p: Pago la luz.

q: Me cortarán la corriente eléctrica.

r: Me quedaré sin dinero.

s: Pediré prestado.

t: Pagar la deuda.

w: soy desorganizado.

$$(p' \rightarrow q) \wedge [p \rightarrow (r \vee s)] \wedge [(r \wedge s) \rightarrow t'] \leftrightarrow w$$

Tablas de verdad.

En estos momentos ya se está en condiciones de elaborar cualquier tabla de verdad. A continuación se presenta un ejemplo para la proposición $[(p \rightarrow q) \vee (q' \wedge r) \leftrightarrow] (r \rightarrow q)$.

p	q	r	q'	p→q	(q'∧r)	(p→q)∨(q'∧r)	r→q	[(p→q)∨(q'∧r) ↔] (r→q)
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1

El número de líneas de la tabla de verdad depende del número de variables de la expresión y se puede calcular por medio de la siguiente formula.

No de líneas = 2^n Donde n = número de variables distintas.

Es importante destacar a medida que se avanza en el contenido del material el alumno deberá participar activamente. Estos significa que cuando se esta definiendo proposiciones y características propias de ellas, además de los ejemplos que el maestro explique, el alumno deberá citar proposiciones diferentes, deberá entender el porque un enunciado no es válido. Cuando se ven conectores lógicos, los alumnos deberán saber emplearlos en la representación de proposiciones más complejas. Pero algo muy importante, es que los ejemplo que el maestro y los alumnos encuentren en la clase, deben ser de interés para el estudiante. Cuando se ven tablas de verdad el alumno deberá saber perfectamente bien el porque de cada uno de los resultados. En pocas palabras el conocimiento deberá ser significativo.

Tautología y contradicción.

Tautología, es aquella proposición (compuesta) que es cierta para todos los valores de verdad de sus variables. Un ejemplo típico es la contrapositiva cuya tabla de verdad se indica a continuación.

P	q	p'	q'	$p \rightarrow q$	$q' \rightarrow p'$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q' \rightarrow p')$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Note que en las tautologías para todos los valores de verdad el resultado de la proposición es siempre 1. Las tautologías son muy importantes en lógica matemática ya que se consideran leyes en las cuales nos podemos apoyar para realizar demostraciones.

A continuación me permito citar una lista de las tautologías más conocidas y reglas de inferencia de mayor uso en las demostraciones formales que obviamente el autor no consideró..

1.- Doble negación.

a). $p \equiv \neg \neg p$

2.- Leyes conmutativas.

a). $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$

b). $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$

c). $(p \ll q) \equiv (q \ll p)$

3.- Leyes asociativas.

a). $[(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$

b). $[(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$

4.- Leyes distributivas.

a). $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

b). $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

5.- Leyes de idempotencia.

a). $(p \vee p) \equiv p$

b). $(p \wedge p) \equiv p$

6.- Leyes de Morgan

a). $(p \vee q)' \equiv (p' \wedge q')$

b). $(p \wedge q)' \equiv (p' \vee q')$

c). $(p \vee q) \equiv (p' \wedge q)'$

b). $(p \wedge q) \equiv (p' \vee q)'$

7.- Contrapositiva.

a). $(p \rightarrow q) \equiv (q' \rightarrow p')$

8.- Implicación.

a). $(p \rightarrow q) \equiv (p \rightarrow q)$

b). $(p \rightarrow q) \equiv (p \rightarrow q)'$

c). $(p \vee q) \equiv (p \rightarrow q)$

d). $(p \wedge q) \equiv (p \rightarrow q)'$

e). $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \equiv [(p \vee q) \rightarrow r]$

f). $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \equiv [p \rightarrow (q \wedge r)]$

9.- Equivalencia

a). $(p \ll q) \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

10.- Adición.

a). $p \rightarrow (p \vee q)$

11.- Simplificación.

a. $(p \vee q) \wedge p$

12.- Absurdo

a. $(p \wedge 0) \wedge p'$

13.- Modus ponens.

a. $[p \vee (p \wedge q)] \wedge p$

14.- Modus tollens.

a. $[(p \wedge q) \vee q'] \wedge p'$

15.- Transitividad del «

a. $[(p \wedge q) \vee (q \wedge r)] \wedge (p \wedge r)$

16.- Transitividad del ®

a. $[(p \wedge q) \vee (q \wedge r)] \wedge (p \wedge r)$

17.- Mas implicaciones lógicas.

a. $(p \wedge q) \wedge [(p \vee r) \wedge (q \vee s)]$

b. $(p \wedge q) \wedge [(p \vee r) \wedge (q \vee s)]$

c. $(p \wedge q) \wedge [(q \wedge r) \wedge (p \wedge r)]$

18.- Dilemas constructivos.

a. $[(p \wedge q) \vee (r \wedge s)] \wedge [(p \vee r) \wedge (q \vee s)]$

b. $[(p \wedge q) \vee (r \wedge s)] \wedge [(p \vee r) \wedge (q \vee s)]$

Contradicción es aquella proposición que siempre es falsa para todos los valores de verdad, una de las mas usadas y mas sencilla es $p \wedge p'$. Como lo muestra su correspondiente tabla de verdad.

p	p'	$p \wedge p'$
0	1	0
1	0	0

Si en el ejemplo anterior
p: La puerta es verde.

La proposición $p \wedge p'$ equivale a decir que "La puerta es verde y la puerta no es verde". Por lo tanto se esta contradiciendo o se dice que es una **falacia**.

Una proposición compuesta cuyos resultados en sus deferentes líneas de la tabla de verdad, dan como resultado 1s y 0s se le llama **contingente**.

Equivalencia lógica.

Se dice que dos proposiciones son lógicamente equivalentes, o simplemente **equivalentes**. Si coinciden sus resultados para los mismo valores de verdad. Se indican como $p \equiv q$.

Considero que un buen ejemplo es el que se estableció para ilustrar la tautología en donde se puede observar que las columnas de $(p \rightarrow q)$ y $(q' \rightarrow p')$ para los mismo valores de verdad, por lo tanto se puede establecer que $(p \rightarrow q) \equiv (q' \rightarrow p')$

Reglas de inferencia

Los argumentos basados en tautologías representan métodos de razonamiento universalmente correctos. Su validez depende solamente de la forma de las proposiciones que intervienen y no de los valores de verdad de las variables que contienen. A esos argumentos se les llama **reglas de inferencia**. Las reglas de inferencia permiten relacionar dos o más tautologías o hipótesis en una demostración.

Ejemplo 1

¿Es válido el siguiente argumento?.

Si usted invierte en el mercado de valores, entonces se hará rico.
Si se hace usted rico, entonces será feliz.

∴ Si usted invierte en el mercado de valores, entonces será feliz.

Sea:

p: Usted invierte en el mercado de valores.

q: Se hará rico.

r: Será feliz

De tal manera que el enunciado anterior se puede representar con notación lógica de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

Ejemplo 2.

¿Es válido el siguiente argumento?.

Si bajan los impuestos, entonces se eleva el ingreso
El ingreso se eleva.

∴ Los impuestos bajan

Solución:

Sea

p: Los impuestos bajan.

q: El ingreso se eleva.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

El aplicar la regla de inferencia es lo que le cuesta más al alumno y se deberá poner mucha atención para que el alumno aprenda a aplicar dicha regla.

En una demostración no solamente hay tautologías e hipótesis, también existen reglas de inferencia que permiten obtener nuevas líneas válidas, esta es la parte en donde la mayoría de alumnos tienen problemas y en donde no sabe que regla aplicar para resolver un determinado problema. A continuación se cita una lista de las principales reglas de inferencia que se pueden aplicar en una demostración.

19.- Adición
$$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$$

23.- Conjunción
$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 20.- \text{ Simplificación} \\
 p \wedge q \\
 \hline
 \therefore p
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 24.- \text{ Modus ponens} \\
 p \\
 p \rightarrow q \\
 \hline
 \therefore q
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 21.- \text{ Silogismo disyuntivo} \\
 p \vee q \\
 p' \\
 \hline
 \therefore q
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 25.- \text{ Modus tollens} \\
 p \rightarrow q \\
 q' \\
 \hline
 \therefore p'
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 22.- \text{ Silogismo hipotético} \\
 p \rightarrow q \\
 q \rightarrow r \\
 \hline
 p \rightarrow r
 \end{array}$$

Métodos de demostración.

Demostración por el método directo.

Supóngase que $p \rightarrow q$ es una tautología, en donde p y q pueden ser proposiciones compuestas, en las que intervengan cualquier número de variables propositivas, se dice que q se desprende lógicamente de p . Supóngase una implicación de la forma.

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \Rightarrow q$$

Es una tautología. Entonces esta implicación es verdadera sin importar los valores de verdad de cualquiera de sus componentes. En este caso, se dice que q se desprende lógicamente de p_1, p_2, \dots, p_n . Se escribe.

$$\begin{array}{l}
 p_1 \\
 p_2 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 p_n \\
 \hline
 \therefore q
 \end{array}$$

Realmente el camino que se debe seguir para llevar a cabo una demostración formal usando el método directo. Significa que si se sabe que p_1 es verdadera, p_2 es verdadera, y p_n también es verdadera, entonces se sabe que q es verdadera.

Prácticamente todos los teoremas matemáticos están compuestos por implicaciones de este tipo.

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \Rightarrow q$$

Donde las p_i son llamadas hipótesis o premisas, y q es llamada conclusión. "Demostrar el teorema", es demostrar que la implicación es una tautología. Note que no estamos tratando de demostrar que q (la conclusión) es verdadera, sino solamente que q es verdadera si todas las p_i son verdaderas.

Toda demostración debe comenzar con las hipótesis, seguidas de las tautologías y reglas de inferencia necesarias, hasta llegar a la conclusión.

A continuación se prueba un enunciado en donde se puede apreciar el uso tanto de las tautologías como de las reglas de inferencia.

Sean

p: Trabajo.

q: Ahorro.

r: Compraré una casa.

s: Podré guardar el coche en mi casa.

Analizar el siguiente argumento:

"Si trabajo o ahorro, entonces compraré una casa. Si compro una casa, entonces podré guardar el coche en mi casa. Por consiguiente, si no puedo guardar el coche en mi casa, entonces no ahorro".

El enunciado anterior se puede representar como:

$(p \cup q) \supset r$; y $r \supset s$; entonces $s' \supset q'$

Equivale también a probar el siguiente teorema:

$[(p \cup q) \supset r] \cup [r \supset s] \supset [s' \supset q']$

Como se trata de probar un teorema de la forma general:

$p_1 \cup p_2 \cup \dots \cup p_n \supset q$

Se aplica el procedimiento general para demostración de enunciados válidos. A continuación se demuestra el teorema respaldando cada uno de sus pasos en tautologías o reglas de inferencia ya conocidas.

1.-	$(p \cup q) \supset r$	Hipótesis
2.-	$r \supset s$	Hipótesis
3.-	$q \supset (q \cup p)$	Adición tautología 10
4.-	$q \supset (p \cup q)$	3; ley conmutativa, regla 2
5.-	$q \supset r$	4,1; silogismo hipotético, regla 22
6.-	$q \supset s$	5,2; regla 22
7.-	$s' \supset q'$	6; contrapositiva, regla 7.

El enunciado es válido aunque la conclusión puede ser falsa o verdadera.

Es recomendable numerar cada uno de los pasos. Se puede notar que las primeras líneas son hipótesis, la línea 3 es una tautología conocida y de la línea 4 a 7 se obtuvieron aplicando reglas de inferencia. Se indica la regla de inferencia aplicada por medio del número de la derecha, y las líneas a las cuales se les aplicó dicha regla de inferencia por medio de los números de la izquierda.

El ejemplo anterior es una demostración sencilla, pero puede ser tan complicada como sea necesario y el método debe funcionar.

Demostración por contradicción.

El procedimiento de la demostración por contradicción es semejante a la que se realizó por el método directo con la diferencia de que las líneas iniciales de dicha demostración no son únicamente las hipótesis, sino además se incluye en la demostración una línea con la negación de la conclusión. Por otro lado el objetivo de la demostración es llegar a una contradicción.

La demostración del siguiente teorema por el método de contradicción es como se indica

$[p \supset (p \cup r)] \cup [(q \cup s) \supset t] \cup (p \cup s) \Rightarrow t$

Demostración

1.-	$p \rightarrow (p \vee r)$	Hipótesis
2.-	$(q \vee s) \rightarrow t$	Hipótesis
3.-	$p \vee s$	Hipótesis
4.-	t'	Negación de la conclusión
5.-	$(q \vee s)'$	2,4; Modus tollens, regla 25
6.-	$q' \vee s'$	5; Ley de Morgan, 6ª
7.-	q'	6; Simplificación, regla 20
8.-	$s' \vee q'$	6; Ley conmutativa, 2b
9.-	s'	8; Simplificación, regla 20
10.-	$s \vee p$	3; Ley conmutativa, 2ª
11.-	p	10,9; Silogismo disyuntivo, regla 21
12.-	$q \vee r$	11,1; Modus ponens, regla 24
13.-	q	12; Simplificación, regla 29
14.-	$q \vee q'$	13,7; Conjunción, regla 23
15.-	Contradicción.	

Note que juntamente con las premisas se debe incluir la negación de la conclusión. En este momento el alumno ya tiene los elementos para llevar a cabo demostraciones con el apoyo del maestro. Es conveniente plantear varios enunciados, para que el alumno los represente con simbología lógica en forma de teorema. Que ese mismo teorema lo represente con su tabla de verdad y haga la correspondiente demostración por los dos métodos antes mencionados

La forma en que el aprende a aplicar reglas de inferencia es semejante a la manera en que deberá realizar una factorización o una aplicación de una fórmula en cálculo diferencial o integral o la formula que debe aplicar para resolver un problema en física. Lo que debe aprender es a relacionar los distintos conocimientos para poder llegar a la solución. Es importante mencionar que el camino que debe seguir el alumno no es el mismo que el maestro siguió sino uno distinto pero que ambos llegan al resultado.

Conclusiones.

La idea principal de este trabajo es que el alumno aprenda el concepto de proposición, la forma en que se pueden formar proposiciones compuestas usando los conectores lógicos, representar enunciados por medio de simbología lógica, conocer los conceptos de tautología, equivalencia lógica, regla de inferencia. Realizar demostraciones de teoremas por medio del método directo y contradicción. Pero con problemas que le sean familiares e interesantes. Se trata de que en cada uno de los subtemas participe proponiendo sus propios ejemplo y que sobre todo al final de la unidad él tenga la habilidad, confianza e iniciativa para inferir posibles soluciones.

Todo enunciado puede ser planteado en términos de teoremas. Un teorema por lo general es resultado de un planteamiento de un problema, este planteamiento debe tener el siguiente formato.

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \Rightarrow q$$

Como se establece p_1, p_2, \dots, p_n son hipótesis (o premisas) derivadas del mismo problema y que se consideran válidas. Pero además deberán conectarse con el operador And (\wedge), lo cual implica que p_1 es cierta y (\wedge) p_2 es verdad y (\wedge)..... y p_n también es cierta entonces (\Rightarrow) la conclusión (q) es cierta. Para realizar la demostración formal del teorema se deberá partir de las hipótesis, y después obtener una serie de pasos que también deben ser válidos, ya que son producto de reglas de inferencia. Sin embargo no solamente las hipótesis y reglas de inferencia pueden aparecer en una demostración formal, sino también tautologías conocidas. En el teorema anterior cada uno de los pasos p_1, p_2, \dots, p_n son escalones que deberán alcanzarse hasta llegar a la solución.

Lo mismo ocurre con todo tipo de problemas que se nos presentan en la vida, antes de llegar a la solución debemos alcanzar ciertas metas (p_1, p_2, \dots, p_n) hasta llegar al objetivo o conclusión (q). Pero una vez que logramos el objetivo debemos plantearnos nuevos objetivos que nos permitirán superarnos.

Dependiendo del área de interés al estudiante puede transportar dichos conocimientos, de tal manera que le auxilien para entender y resolver otro tipo de problemas. En el caso de computación cada línea de un programa se obtiene inconcientemente aplicando una regla de inferencia y por lo tanto cada instrucción tiene su orden en

que debe de ir colocada, si se cambia esa línea seguramente el resultado ya no será igual. Pero hay tantas formas de resolver un problema por medio de un programa como alumnos distintos tenga un maestro.

Una demostración formal equivale a relacionar esquemas para formar estructuras cognitivas. Sí el alumno sabe inferir soluciones lógicas, estará en condiciones de resolver todo tipo de problemas.

Uno de los objetivos principales del constructivismo, es la construcción del conocimiento. El tema de "lógica matemática", se presta para que el alumno pueda realizar los relacionamientos entre las distintas proposiciones, esto permite crear nuevas formas de resolver problemas en distintas ramas: matemáticas, física, química pero también en las ciencias sociales y por su puesto cualquier problema de la vida real. Porque cada vez que nos enfrentamos a un problema, manipulamos la información por medio de reglas de inferencia que aunque no estén escritas debemos respetar. Cada vez que realizamos una actividad empleamos la lógica para realizarla, quizá algunos realicen dicha actividad por caminos más corto, otros realizan recorridos más largos, pero al fin de cuentas lo que importa es llegar al resultado. Si se le da la confianza al alumno para que cree e innove, su estructura cognitiva seguramente va a crecer.

Resumen:

Trabajo que contiene los aspectos importantes en la lógica matemática, desde la definición de proposición, tipos de operadores lógicos, tautología, contradicción, proposiciones condicionales y bicondicionales, demostración formal.

Palabras clave:

Lógica matemática, proposición, tautología, contradicción, operadores lógicos, unión, intersección, complementación, proposición condicional, proposición bicondicional, teoremas, hipótesis, demostración formal.